MATHEMATIQUES	BAC BLANC N°3	LYCEE LES BRUYERES
28/05/11	ANNEE 2010-2011	M. HMITO A.

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathscr{D}_1)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -1+2t \\ y &=& -3t \\ z &=& 1+t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathscr{D}_2)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1-2t \\ y &=& 5-t \\ z &=& -2+t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :

Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le point A de coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,3)$ et la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D})\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+4t \\ y &=& -2+2t \\ z &=& 3-2t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :

Le plan $(\mathscr{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x+y-z=0$.

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}000\,3$.

On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Affirmation :

La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2 000 heures est inférieure à 0,5.

Question 4

A et B sont deux évènements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient :

$$p(A) = 0{,}4,\ p_A(B) = 0{,}7 \text{ et } p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}1.$$

Affirmation :

La probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{41}$.

EXERCICE 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et que pour tout x de $]0~;~+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.
À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

PARTIE B - Étude de fonction

Affirmation :
Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, on considère le point A de coordonnées $(2~;~-1~;~3)$ et la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D})\left\{\begin{array}{l c r}x & = & 1+4t\\ y & = & -2+2t\\ z & = & 3-2t\end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Affirmation :
Le plan $(\mathscr{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x + y - z = 0$.

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0003$.

On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \text{e}^{-\lambda x}\,\text{d}x$.

Affirmation :
La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2 000 heures est inférieure à 0,5.

$]0~;~+\infty[$.

4. En déduire le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer le point A de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente $\mathscr{T}$ est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
6. Dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$ et la courbe $\mathscr{C}$.

Utiliser le papier millimétré fourni en complétant l'entête avec vos nom, prénom et classe.

III - Calcul d'une aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\text{e}} \dfrac{\ln x}{x}\,\text{d}x = \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire l'aire de la région du plan délimitée par les droites d'équation $x =$ 1,
   $x = \text{e}$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$. On exprimera cette aire en cm^2. Hachurer cette région sur le graphique.

Exercice 3. **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. *Question de cours*

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ ».

Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes respectives m, n et p tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

a. Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.

b. Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_A = 4 + i, \quad z_B = 1 + i, \quad z_C = 5i \text{ et } z_D = -3 - i.$$

Placer ces points sur une figure.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i.$$

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.

4. a. Montrer que pour tout nombre complexe z, on a :

$$z' - z = -2i(2 - i - z).$$

b. En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right)$

c. Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

d. Soit E le point d'affixe $z_E = -1 - i\sqrt{3}$. Écrire z_E sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E' associé au point E.

Exercice 3 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Soit t un nombre réel fixe et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ direct.

On note a, b, c, m, n et p, les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.

b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

Ou notera G ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{A(1-t)\ ;\ B(t)\}$, et en déduire que $r(M) = N$.

On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}\right)$.

Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P.

c. Conclure sur l' existence et l'unicité de σ.

EXERCICE 4 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. Un animal est choisi au hasard.
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0, 058.
3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?
4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?
5. Calculer le nombre N minimal d'animaux à choisir pour que la probabilité pour qu'au moins un des N animaux ait un test positif soit supérieure à 0,9999. (Dans les mêmes conditions sur la taille du troupeau qu'au 4.)